Métodos Numéricos

Raíces de Ecuaciones

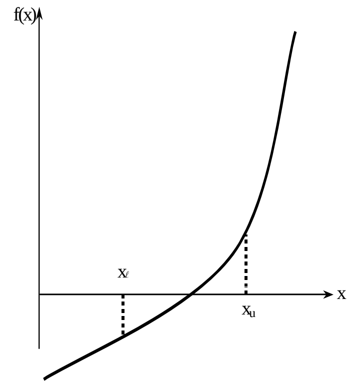
Raíces de Ecuaciones

- Las raíces de una función f(x) son los valores de x que satisfacen a la función f(x) = 0.

- Los métodos numéricos para encontrar las raíces de una función usan iteraciones para producir una secuencia de números que se espera converjan aun límite (llamado punto fijo) que sea una raíz. Los primeros valores de esta serie son suposiciones iniciales. El método calcula los valores subsecuentes con base a los valores anteriores y la función f.

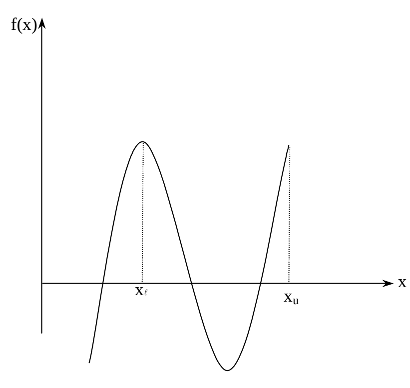
Método de Bisección

- El método de Bisección se aplica a funciones continuas y requiere del conocimiento previo de dos valore de x para los que sus valores de f(x) sean de signo contrario.
- Sea f(x) real y continua en el intervalo x_i a x_f y $f(x_i)$ y $f(x_f)$ tienen signos opuestos, esto es $f(x_i)\,f(x_f) < 0$. Entonces hay una raíz real entre x_i y x_f.



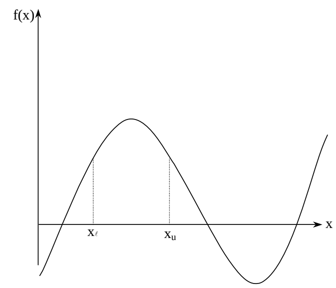
Método de Bisección

- Aún si una función f(x) no cambia de signo entre dos puntos, pueden existir raíces de esa función entre esos dos puntos



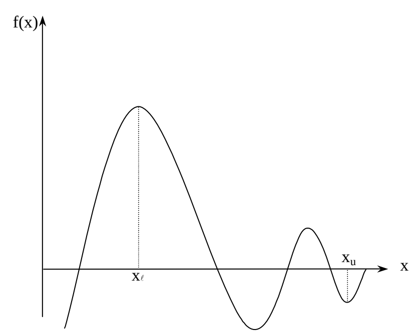
MÉTODO DE BISECCIÓN

- Si una función f(x) no cambia de signo entre dos puntos, puede no existir raíces de esa función entre esos dos puntos



MÉTODO DE BISECCIÓN

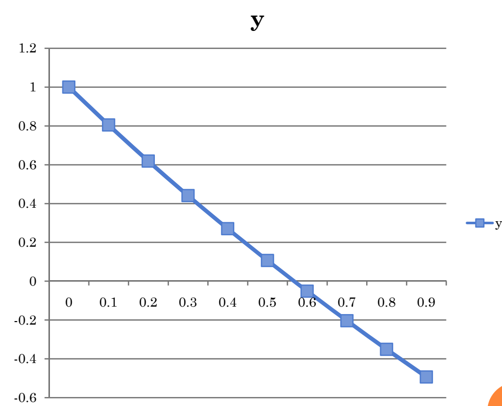
- Si una función f(x) cambia de signo entre dos puntos, pueden existir múltiples raíces de esa función entre esos dos puntos



Ejemplo

- Sea la siguiente función: $y = e^{-x} - x$

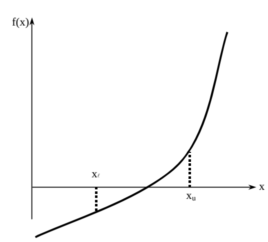
x	y
0	1
0.1	0.8048
0.2	0.6187
0.3	0.4408
0.4	0.2703
0.5	0.1065
0.6	-0.0512
0.7	-0.2034
0.8	-0.3507
0.9	-0.4934

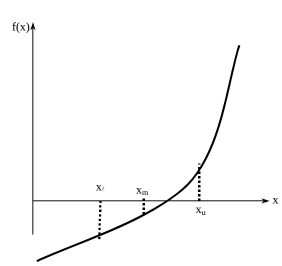


Algoritmo del Método de Bisección

1. Escojanse dos valores iniciales x_i y x_f, de forma que tal que la función cambie de signo en el intervalo.
2. La primera aproximación de la raíz es:

$$x_r = \frac{x_i + x_f}{2}$$





Algoritmo del Método de Bisección

3. Haga lo siguiente
   a) Si $f(x_i)\ f(x_r) < 0$, entonces la raíz se encuentra en el subintervalo x_i y x_r. Haga $x_f = x_r$. y continue en el paso 4.
   b) Si $f(x_i)\ f(x_r) > 0$, entonces la raíz se encuentra en el subintervalo x_r y x_f. Haga $x_i = x_r$. y continue en el paso 4.
   c) Si $f(x_i)\ f(x_r) = 0$, entonces la raíz es x_r y terminan los cálculos.

Algoritmo del Método de Bisección

4. Calcúlese una nueva aproximación a la raíz mediante:

$$x_r = \frac{x_i + x_f}{2}$$

5. Decídase si la nueva aproximación es tan exacta como se desea. Si es así los cálculos terminan, de otra manera regrese al paso 3.

Criterio de Paro y estimación de errores

- Una estimación del error del Método de Bisección está dada por:

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_r^{nueva} - x_r^{anterior}}{x_r^{nueva}} \right|$$

- El algoritmo termina si el valor de $|\varepsilon_a|$ es menor que un valor predeterminado.

Ventajas del Método de bisección

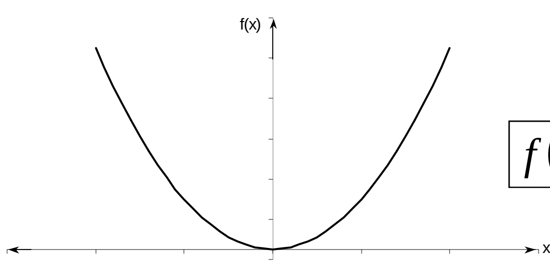
- Encuentra la raíz de una función si se sabe que existe en un intervalo dado.
- Encuentra una raíz aún cuando la función no sea analítica
- El método siempre converge

Desventajas del Método de bisección

- El método converge lentamente
- Si uno de los valores iníciales está cera de la raíz, el método converge más lentamente

Desventajas del Método de bisección

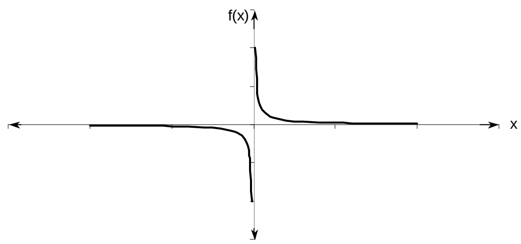
- Si la función f(x) es tal que es tangente al eje x, no se podrá establecer los valores iniciales



$$\boxed{f(x) = x^2}$$

Desventajas del Método de bisección

- Si la función f(x) cambia de signo pero no existe en un punto, el método puede converger a esa singularidad.



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Ejemplo

Determine una de las raíces de la función

$$y = x^3 - 5$$

Usando el Método de Bisección

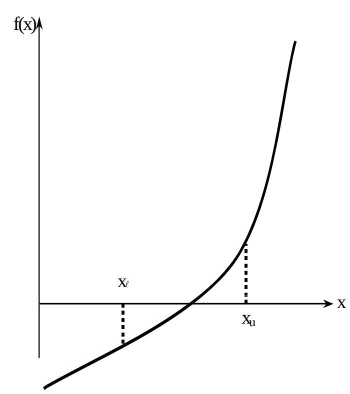
x	$y = x^3 - 5$
0.00	-5.00
1.00	-4.00
2.00	3.00

Ejemplo

xi	xf	xr	f(xi)	f(xr)	f(xi)*f(xr)	ea
1.0000	2.0000	1.5000	-4.0000	-1.6250	6.5000	
1.5000	2.0000	1.7500	-1.6250	0.3594	-0.5840	0.1429
1.5000	1.7500	1.6250	-1.6250	-0.7090	1.1521	-0.0769
1.6250	1.7500	1.6875	-0.7090	-0.1946	0.1380	0.0370
1.6875	1.7500	1.7188	-0.1946	0.0774	-0.0151	0.0182
1.6875	1.7188	1.7031	-0.1946	-0.0599	0.0116	-0.0092
1.7031	1.7188	1.7109	-0.0599	0.0084	-0.0005	0.0046
1.7031	1.7109	1.7070	-0.0599	-0.0258	0.0015	-0.0023
1.7070	1.7109	1.7090	-0.0258	-0.0087	0.0002	0.0011
1.7090	1.7109	1.7100	-0.0087	-0.0001	0.0000	0.0006

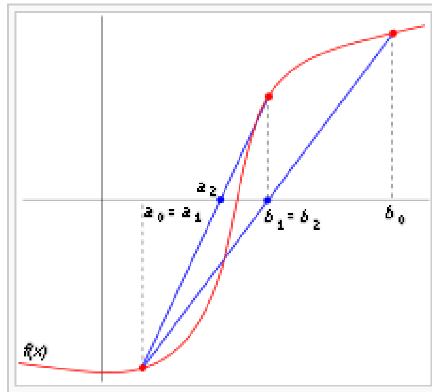
Método de Falsa Posición

- El método de la Regla Falsa se aplica a funciones continuas y requiere del conocimiento previo de dos valores de x para los que sus valores de f(x) sean de signo contrario.
- Sea f(x) real y continua en el intervalo x_i a x_f y $f(x_i)$ y $f(x_f)$ tienen signos opuestos, esto es $f(x_i)\, f(x_f) < 0$. Entonces hay una raíz real entre x_i y x_f.



Algoritmo del Método de Falsa Posición

1. Escójanse dos valores iniciales x_i y x_f, de forma que tal que la función cambie de signo en el intervalo.
2. La primera aproximación de la raíz es el valor x_r para el que la recta que une a los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_f, f(x_f))$:



Algoritmo del Método de Falsa Posición

La ecuación de la recta que une a los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_r, f(x_r))$ es:

$$f(x_r) - f(x_i) = m(x_r - x_i)$$

Despejando para x_r, Tenemos:

$$x_r - x_i = \frac{1}{m}[f(x_r) - f(x_i)]$$

La aproximación de la raíz es el punto en que la recta cruza el eje x, $f(x_r) = 0$:

$$x_r = x_i - \frac{1}{m} f(x_i)$$

El valor de m es

$$m = \frac{f(x_f) - f(x_i)}{x_f - x_i}$$

Substituyendo en la ecuación de la raíz, tenemos:

$$x_r = x_i - \frac{x_f - x_i}{f(x_f) - f(x_i)} f(x_i)$$

Algoritmo del Método de Falsa Posición

3. Haga lo siguiente
   a) Si $f(x_i)\ f(x_r) < 0$, entonces la raíz se encuentra en el subintervalo x_i y x_r. Haga $x_f = x_r$. y continue en el paso 4.
   b) Si $f(x_i)\ f(x_r) > 0$, entonces la raíz se encuentra en el subintervalo x_r y x_f. Haga $x_i = x_r$. y continue en el paso 4.
   c) Si $f(x_i)\ f(x_r) = 0$, entonces la raíz es x_r y terminan los cálculos.

Algoritmo del Método de Falsa Posición

4. Calcúlese una nueva aproximación a la raíz mediante:

$$x_r = x_i - \frac{x_f - x_i}{f(x_f) - f(x_i)} f(x_i)$$

5. Decídase si la nueva aproximación es tan exacta como se desea. Si es así los cálculos terminan, de otra manera regrese al paso 3.

Criterio de Paro y estimación de errores

- Una estimación del error del método de Falsa Posición está dada por:

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_r^{nueva} - x_r^{anterior}}{x_r^{nueva}} \right|$$

- El algoritmo termina si el valor de $|\varepsilon_a|$ es menor que un valor predeterminado.

Ejemplo

Determine una de las raíces de la función

$$y = x^3 - 5$$

Usando el método de la Falsa Posición

x	$y = x^3 - 5$
0.00	-5.00
1.00	-4.00
2.00	3.00

Ejemplo

xi	xf	xr	f(xi)	f(xf)	f(xr)	f(xi)*f(xr)	ea
1.0000	2.0000	1.5714	-4.0000	3.0000	-1.1195	4.4781	
1.5714	2.0000	1.6879	-1.1195	3.0000	-0.1912	0.2140	0.0690
1.6879	2.0000	1.7066	-0.1912	3.0000	-0.0296	0.0057	0.0110
1.7066	2.0000	1.7095	-0.0296	3.0000	-0.0045	0.0001	0.0017
1.7095	2.0000	1.7099	-0.0045	3.0000	-0.0007	0.0000	0.0003

Método del Punto Fijo

Si la función $f(x) = 0$ puede reagruparse de la forma $x = g(x)$, entonces podemos escribir un método iterativo:

$x_{n+1} = g(x_n)$ $n = 0, 1, 2,\ldots$

Donde n es el número de iteraciones y x_0 es el valor inicial.

Definición:

Si $c = g(c)$ entonces c es un punto fijo para la función $g(x)$.

Teorema del Valor Inicial

Sea $g(x)$ tal que exista para toda x en [a, b] y tal que $g'(x)$ exista en (a, b). Asuma que existe una constante K tal que

$| g'(x) | \leq K \leq 1$ para toda x en (a, b)

Asuma que c en (a, b) es un punto fijo para g. Entonces si x_0 es un punto (a, b), la secuencia

$x_{n+1} = g(x_n)$ $n = 0, 1, 2,\ldots$

Converge al único punto fijo c.

Ejemplo

Determine una de las raíces de la función

$$y = x^3 - 7x + 2 \quad en \quad [0, 1]$$

Usando el método del Punto Fijo

Reescribiendo la función como:

$$x = \frac{x^3 + 2}{7}$$

Entonces

$$g(x) = \frac{x^3 + 2}{7} \quad y \quad g'(x) = \frac{3x^2}{7} < \frac{3}{7} \quad para\ \ toda\ \ x\ en\ (0, 1)$$

Por lo que por el Teorema del Punto Fijo, la secuencia

$$x_{n+1} = \frac{x^3 + 2}{7}$$

Converge a la raíz de

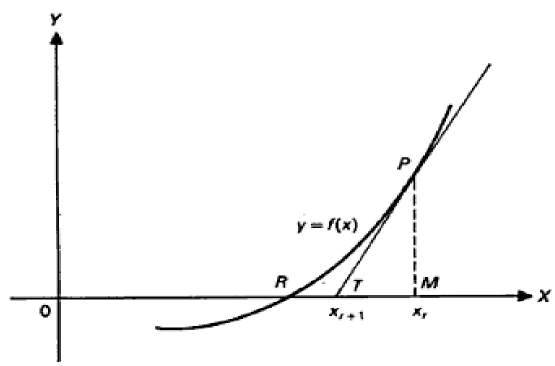
$$y = x^3 - 7x + 2$$

Ejemplo

xi	$\frac{x^3+2}{7}$	ea
0.000000	0.285714	
0.285714	0.289046	1.000000
0.289046	0.289164	0.011527
0.289164	0.289168	0.000408
0.289168	0.289169	0.000015
0.289169	0.289169	0.000001
0.289169	0.289169	0.000000

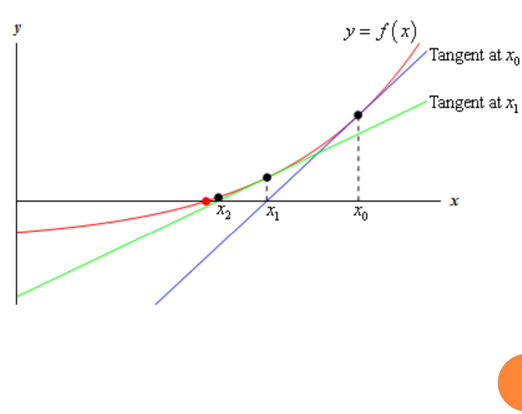
MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

- El método de Newton – Raphson empieza con un valor inicial para la raíz, x_i.
- La siguiente aproximación se obtiene encontrando el punto en el que la recta tangente a la función f(x) en el punto (x_i, f(x_i)) cruza el eje de las x.



ALGORITMO DEL MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

1. Escójanse un valores inicial x_i.
2. La primera aproximación de la raíz es el valor x_r para el que la recta tangente a la función f(x) en el punto (x_i, f(x_i)) cruza el eje de las x :



Algoritmo del Método de Newton - Raphson

La ecuación de la recta tangente a la función f(x) en el punto x_i es:

$$f(x_r) - f(x_i) = f^{'}(x_i)(x_r - x_i)$$

Despejando para x_r, Tenemos:

$$x_r - x_i = \frac{1}{f^{'}(x_i)}[f(x_r) - f(x_i)]$$

La aproximación de la raíz es el punto en que la recta cruza el eje x, $f(x_r) = 0$:

$$x_r = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{'}(x_i)}$$

Algoritmo del Método de Newton - Raphson

3. Calcúlese una nueva aproximación a la raíz mediante:

$$x_r = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{'}(x_i)}$$

4. Decídase si la nueva aproximación es tan exacta como se desea. Si es así los cálculos terminan, de otra manera regrese al paso 3.

Criterio de Paro y estimación de errores

- Una estimación del error del método de Falsa Posición está dada por:

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_r^{nueva} - x_r^{anterior}}{x_r^{nueva}} \right|$$

- El algoritmo termina si el valor de $|\varepsilon_a|$ es menor que un valor predeterminado.

Ejemplo

Determine una de las raíces de la función

$$y = x^3 - 5$$

Usando el método de Newton –Raphson. Use x = 1.0 como primera aproximación.

La derivada de la función es:

$$y = 3x^2$$

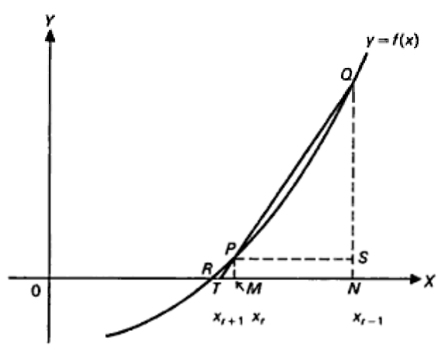
Ejemplo

xi	f(xi)	f'(xi)	ea
1.000000	-4.000000	3.000000	
2.333333	7.703704	16.333333	0.571429
1.861678	1.452287	10.397535	-0.253350
1.722002	0.106236	8.895871	-0.081113
1.710060	0.000735	8.772913	-0.006983
1.709976	0.000000	8.772053	-0.000049
1.709976	0.000000	8.772053	0.000000

Método de la Secante

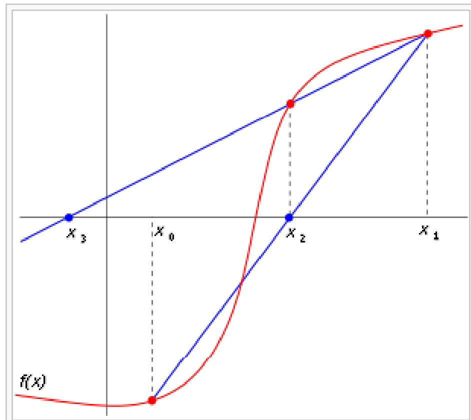
- En el método de Newton - Raphson puede ser complicado evaluar la derivada. En estos casos se puede aproximarse la derivada por una diferencia dividida:

$$f'(x_2) \approx \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$



Algoritmo del Método de la Secante

1. Escójanse dos valores iniciales x_1 y x_2.
2. La primera aproximación de la raíz es el valor x_r para el que la recta que une a los puntos (x_1, $f(x_1)$) y (x_2, $f(x_2)$) cruza el eje de las x:



Algoritmo del Método de la Secante

La ecuación de la recta que une a los puntos (x_2, $f(x_2)$) y (x_r, $f(x_r)$) es:

$$f(x_r) - f(x_2) = f'(x_2)(x_r - x_2)$$

Despejando para x_r, Tenemos:

$$x_r - x_2 = \frac{1}{f'(x_2)}[f(x_r) - f(x_2)]$$

La aproximación de la raíz es el punto en que la recta cruza el eje x, $f(x_r) = 0$:

$$x_r = x_i - \frac{1}{f(x_2)} f(x_2)$$

El valor de aproximado de m es

$$f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Substituyendo en la ecuación de la raíz, tenemos:

$$x_r = x_2 - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} f(x_2)$$

Algoritmo del Método de la Secante

3. Haga $x_1 = x_2$ y $x_2 = x_r$.
4. Calcúlese una nueva aproximación a la raíz mediante:

$$x_r = x_2 - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} f(x_2)$$

5. Decídase si la nueva aproximación es tan exacta como se desea. Si es así los cálculos terminan, de otra manera regrese al paso 3.

Criterio de Paro y estimación de errores

- Una estimación del error del método de Falsa Posición está dada por:

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_r^{nueva} - x_r^{anterior}}{x_r^{nueva}} \right|$$

- El algoritmo termina si el valor de $|\varepsilon_a|$ es menor que un valor predeterminado.

Ejemplo

Determine una de las raíces de la función

$$y = x^3 - 5$$

Usando el método de la Secante. Use los valores iniciales de $x_1 = 1.0$ y $x_2 = 2.0$.

x1	x2	xr	f(x1)	f(x2)	ea
1.0000	2.0000	1.5714	-4.0000	3.0000	
2.0000	1.5714	1.6879	3.0000	-1.1195	0.0690
1.5714	1.6879	1.7119	-1.1195	-0.1912	0.0140
1.6879	1.7119	1.7100	-0.1912	0.0167	-0.0011
1.7119	1.7100	1.7100	0.0167	-0.0002	0.0000
1.7100	1.7100	1.7100	-0.0002	0.0000	0.0000
1.7100	1.7100	1.7100	0.0000	0.0000	0.0000
1.7100	1.7100	1.7100	0.0000	0.0000	0.0000